

浅谈结构稳定性

周胤呈

结构稳定是保证结构安全的重要内容。本篇以混凝土结构为例，来梳理一下规范相关条文以及 YJK 程序中的实现。

注：本篇除弹性水平位移推导参考徐培福的《复杂高层建筑设计》，其余均为个人理解、自行推导。

整体稳定

结构在水平荷载作用下，会发生侧向变形，重力产生二阶效应。分为三个阶段：重力二阶效应较小，可以忽略，不考虑其对结构的影响；重力二阶效应较大，需要考虑其对结构的影响；重力二阶效应很大，需要校核结构是否满足整体稳定的要求。根据《高规》5.4节：

5.4.1 当高层建筑结构满足下列规定时，弹性计算分析时可不考虑重力二阶效应的不利影响。

1 剪力墙结构、框架-剪力墙结构、板柱剪力墙结构、筒体结构：

$$EJ_d \geq 2.7H^2 \sum_{i=1}^n G_i \quad (5.4.1-1)$$

2 框架结构：

$$D_i \geq 20 \sum_{j=i}^n G_j/h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.4.1-2)$$

5.4.4 高层建筑结构的整体稳定性应符合下列规定：

1 剪力墙结构、框架-剪力墙结构、筒体结构应符合下式要求：

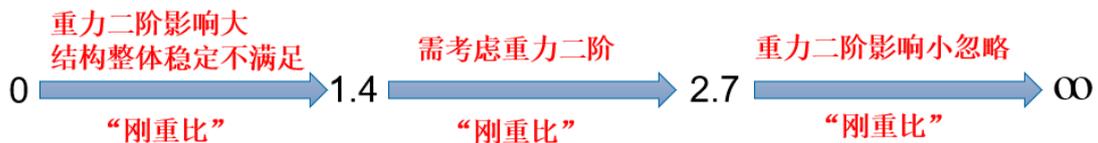
$$EJ_d \geq 1.4H^2 \sum_{i=1}^n G_i \quad (5.4.4-1)$$

2 框架结构应符合下式要求：

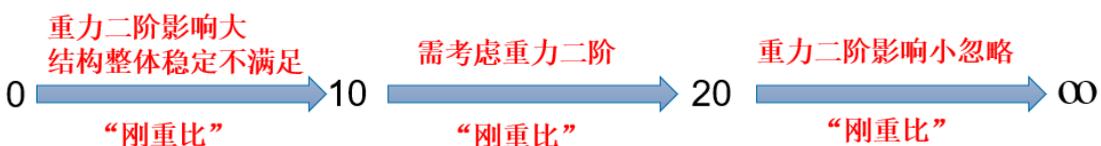
$$D_i \geq 10 \sum_{j=i}^n G_j/h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.4.4-2)$$

我们将规范公式用一个简单的图形进行表达：

非框架结构：



框架结构：

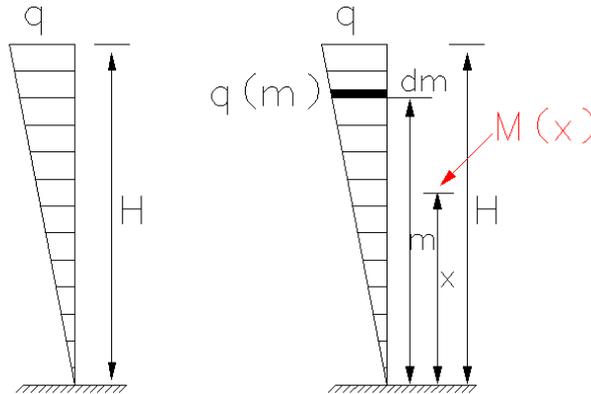


可以看到规范对框架结构、非框架结构“刚重比”的限值不同。这是由于两者在水平力

作用下呈现出不同的变形特点，非框架结构往往较高、偏柔，变形呈现“弯曲”或“弯剪”状态，此时进行稳定验算可近似等效为竖向悬臂受弯构件，“刚重比”只需验算整体结构即可；框架结构往往较矮、偏刚，变形呈现出“剪切”状态，“刚重比”需要逐层进行验算。

弯曲型、弯剪型结构

将高度为 H 的结构等效为竖向悬臂受弯构件，将水平荷载等效为倒三角形分布荷载：



取微元体 dm ，此处荷载 $q(m) = mq/H$ ， $F(m) = q(m) \cdot dm$ ，微元对 x 处弯矩为： $q(m) \cdot (m - x)dm$ 。

积分得到 x 处弯矩：

$$M(x) = \int_x^H q(m)(m - x)dm$$

化简后：

$$= \frac{qH^2}{3} \left(1 - \frac{3x}{2H} + \frac{x^3}{2H^3}\right)$$

根据《建筑结构静力计算实用手册》荷载作用下弹性位移：

$$u = \frac{1}{EI} \int \bar{M} M ds$$

M 是实际荷载引起的弯矩； \bar{M} 是虚设单位荷载引起的弯矩； EI 是杆件截面的抗弯刚度。

结构顶点处的位移：

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{EI} \int_0^H M(x) \bar{M} dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^H \frac{qH^2}{3} \left(1 - \frac{3x}{2H} + \frac{x^3}{2H^3}\right) (H - x) dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{qH^2}{3} \int_0^H \left(H - \frac{5x}{2} + \frac{3x^2}{2H} + \frac{x^3}{2H^2} - \frac{x^4}{2H^3}\right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{qH^2}{3} \left(Hx - \frac{5x^2}{4} + \frac{x^3}{2H} + \frac{x^4}{8H^2} - \frac{x^5}{10H^3}\right) \Big|_0^H \end{aligned}$$

化简后可得：

$$u = \frac{11qH^4}{120EI}$$

(推导详细可参见徐培福《复杂高层建筑结构设计》) 程序计算刚重比采用等效侧向刚度，按倒三角形分布荷载作用下结构顶点位移相等的原则。

根据上述推导可得等效侧向刚度：

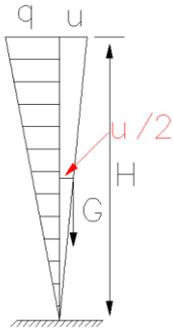
$$EJ_d = \frac{11qH^4}{120u}$$

对应《高规》5.4.1 条文说明：

悬臂受弯构件的等效侧向刚度。假定倒三角形分布荷载的最大值为 q ，在该荷载作用下结构顶点质心的弹性水平位移为 u ，房屋高度为 H ，则结构的弹性等效侧向刚度 EJ_d 可按下列式计算：

$$EJ_d = \frac{11qH^4}{120u} \quad (5)$$

《高规》5.4 条文说明，结构按弹性分析的二阶效应对结构内力、位移增量控制在 5% 左右；考虑实际刚度折减 50% 时，结构内力增量控制在 10% 以内，重力二阶效应影响较小，可忽略不计。据此进行推导：



$$M_{附加} = \frac{Gu}{2} = \frac{11GqH^4}{240EJ_d}$$

$$\frac{M_{附加}}{M} = \frac{11GqH^4}{240EJ_d} * \frac{3}{qH^2} = \frac{33GH^2}{240EJ_d} \leq \frac{5}{100}$$

$$EJ_d \geq 2.75H^2G$$

和规范 2.7 基本相等。即 $EJ_d \geq 2.7H^2G$ 可不考虑重力二阶效应的影响。

当重力二阶效应，引起的附加弯矩小于 10% 时，可以不考虑二阶效应对结构整体稳定性的影响：

$$\frac{M_{附加}}{M} = \frac{11GqH^4}{240EJ_d} * \frac{3}{qH^2} = \frac{33GH^2}{240EJ_d} \leq \frac{10}{100}$$

$$EJ_d \geq 1.375H^2G$$

和规范 1.4 基本相等。即 $EJ_d \geq 1.4H^2G$ 结构整体稳定性满足要求。

以一个层高均为 6m、6 层(含 1 层地下室)的剪力墙结构模型，手算地震作用下的刚重比(YJK 对于刚重比的计算不考虑地下室)：

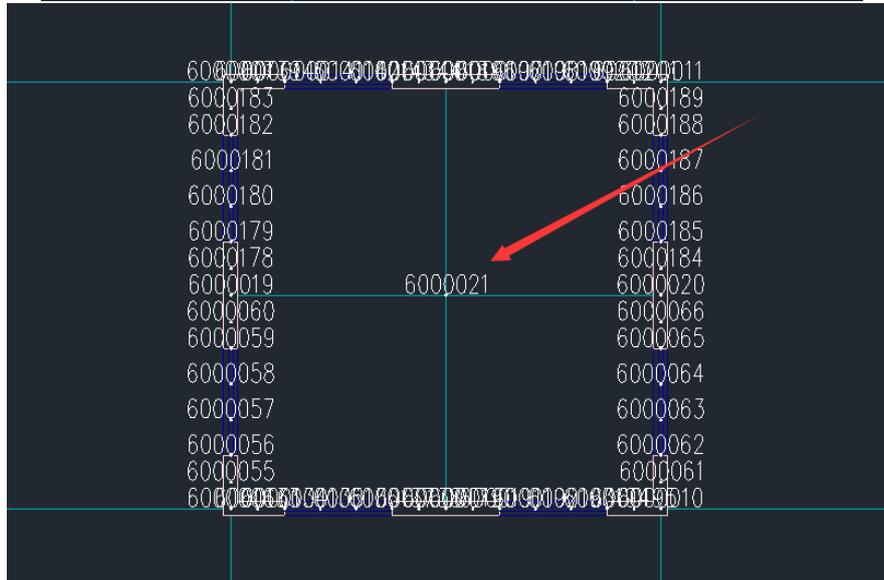
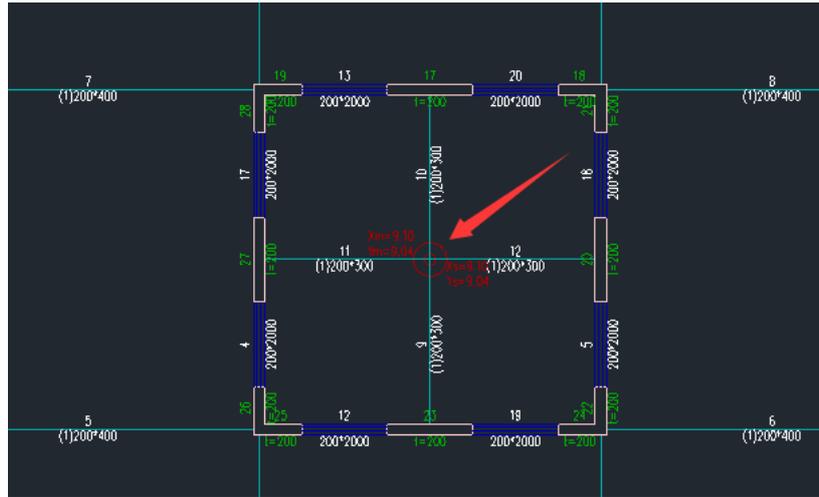
层号	塔号	质心X (m)	质心Y (m)	质心Z (m)	恒载质量 (t)	活载质量 (t)	活载质量 (不折减) (t)	附加质量 (t)	质量比
6	1	9.096	9.036	36.000	462.9	32.4	64.8	0.0	1.00
5	1	9.096	9.036	30.000	462.9	32.4	64.8	0.0	1.00
4	1	9.096	9.036	24.000	462.9	32.4	64.8	0.0	1.00
3	1	9.096	9.036	18.000	462.9	32.4	64.8	0.0	1.00
2	1	9.096	9.036	12.000	462.9	32.4	64.8	0.0	0.84
1	1	9.096	9.036	6.000	558.9	32.4	64.8	0.0	1.00
合计	--	--	--	--	2873.4	194.4	388.8	0.0	

$$G=5 \times (1.2 \times 462.9 + 1.4 \times 64.8) = 32310 \text{ kN}$$

确定位移时，需要勾选上：

输出节点位移

刚重比的计算，程序取质心的位移。由于程序未直接输出质心处的位移，手动复核可以选择离质心最近的节点近似计算。为了更准确的还原计算过程，将对称模型中部布置交叉梁，实现质心在节点上。



wdisp.out 文本中找到对应节点 X 向地震的顶点位移和地下室底板位移(需扣除地下室部分)

wdisp.out - 记事本								
文件(F)	编辑(E)	格式(O)	查看(V)	帮助(H)				
6	6000019	6.206	0.000	0.461	8.090E-009	1.504E-004	5.556E-009	
6	6000020	6.206	0.000	-0.461	8.292E-009	1.504E-004	5.556E-009	
6	6000021	6.206	0.000	0.000	7.930E-009	1.551E-004	5.556E-009	
6	6000022	6.206	-0.000	0.555	-1.668E-005	7.912E-005	5.556E-009	
6	6000023	6.206	-0.000	0.545	-1.566E-005	8.719E-005	5.556E-009	

wdisp.out - 记事本								
文件(F)	编辑(E)	格式(O)	查看(V)	帮助(H)				
1	1000019	0.124	0.000	0.173	5.617E-009	9.878E-005	8.285E-011	
1	1000020	0.124	0.000	-0.173	9.121E-009	9.878E-005	8.285E-011	
1	1000021	0.124	0.000	0.000	1.389E-008	4.475E-005	8.285E-011	
1	1000048	0.124	0.000	-0.123	1.165E-004	9.988E-005	8.285E-011	
1	1000049	0.124	0.000	-0.063	-2.030E-005	3.752E-005	8.285E-011	

$$u=6.206-0.124=6.082$$

Floor	Tower	Fx (kN)	Vx (分塔剪重比) (kN)	Mx (kN-m)	Static Fx (kN)
6	1	505.10	505.10 (10.198%)	3030.57	452.27
5	1	411.70	895.37 (9.038%)	8365.90	376.89
4	1	350.66	1190.76 (8.014%)	15398.36	301.51
3	1	297.40	1403.11 (7.082%)	23620.96	226.13
2	1	216.20	1524.27 (6.155%)	32532.00	150.76
1	1	27.45	1539.01 (5.017%)	41616.05	0.00

剪力取地下室顶板剪力 $V=1524.27\text{kN}$

$$V=qH/2$$

$$q=2V/H=2 \times 1524.27 / (5 \times 6) = 101.618\text{kN/m}$$

$$EJ_d = 11 \times 101.618 \times 30^4 / (120 \times 6.082 \times 10^{-3}) = 1.24 \times 10^9\text{kN/m}$$

$$\text{刚重比: } EJ_d/H^2G = 1.24 \times 10^9 / 30^2 \times 32310 = 42.64$$

手核结果和程序输出基本一致:

地震:

层号: 2 塔号: 1

X向刚重比 $EJ_d/GH^{**2} = 42.660$

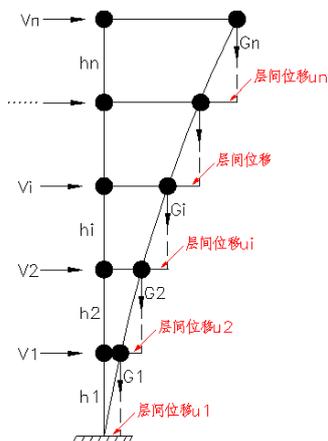
Y向刚重比 $EJ_d/GH^{**2} = 42.655$

该结构刚重比 EJ_d/GH^{**2} 大于 1.4, 能够通过《高规》5.4.4条的整体稳定验算

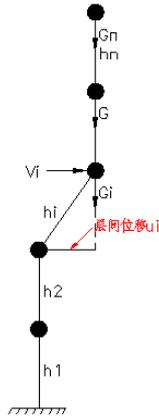
该结构刚重比 EJ_d/GH^{**2} 大于 2.7, 满足《高规》5.4.1, 可以不考虑重力二阶效应

剪切型

对于剪切型结构, 如典型的框架结构, 则需要验算每一层的刚重比。框架结构在水平剪力作用下变形如下图:



以第 i 层为例:



剪切型结构 i 层受到剪力 v_i ，层间产生 u_i 的变形，层高为 h_i 。
则有：

$$M_{i附加} = u_i \sum_{j=i}^n G_j$$

当附加弯矩小于初始弯矩 5% 时：

$$\frac{M_{附加}}{M} = \frac{u_i \sum_{j=i}^n G_j}{v_i h_i} \leq \frac{5}{100}$$

$$\frac{v_i}{u_i} \geq 20 \sum_{j=i}^n G_j / h_i$$

$$D_i \geq 20 \sum_{j=i}^n G_j / h_i$$

即刚重比大于 20 时，可不考虑结构的二阶效应。

当附加弯矩小于初始弯矩 10% 时：

$$\frac{M_{附加}}{M} = \frac{u_i \sum_{j=i}^n G_j}{v_i h_i} \leq \frac{10}{100}$$

$$\frac{v_i}{u_i} \geq 10 \sum_{j=i}^n G_j / h_i$$

$$D_i \geq 10 \sum_{j=i}^n G_j / h_i$$

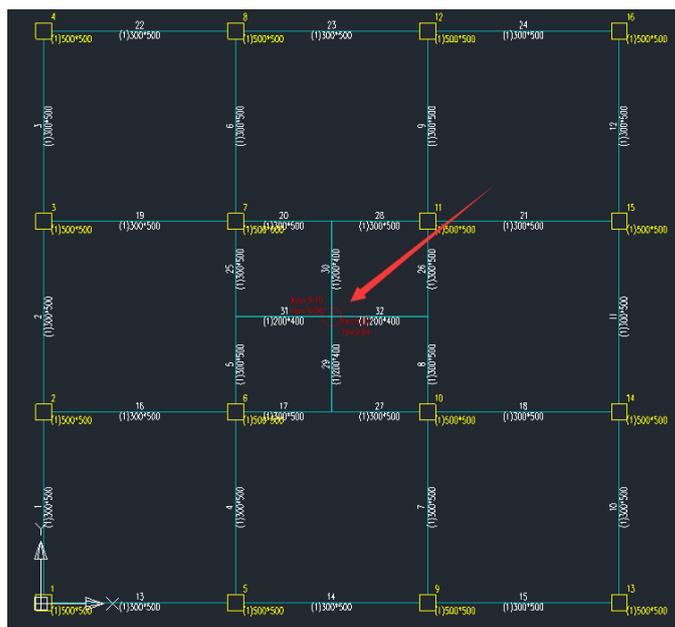
即刚重比大于 10 时，结构稳定性满足要求。

以一个层高均为 6m、5 层的框架结构模型，来还原一下地震作用下第 4 层“刚重比”的计算：

Floor	Tower	Fx (kN)	Vx (分塔剪重比) (kN)	Mx (kN-m)	Static Fx (kN)
5	1	62.85	62.85 (1.454%)	377.08	53.58
4	1	58.10	98.97 (1.145%)	931.71	42.86
3	1	52.97	128.79 (0.993%)	1653.77	32.15
2	1	50.13	150.60 (0.871%)	2501.44	21.43
1	1	53.60	165.06 (0.764%)	3423.22	10.72

u_4 为第 4 层质心处的层间位移，程序并没有直接输出，采用与弯曲型相同的处理方式：模型

对称布置，使质心在节点位置。



然后通过三维位移中的两点位移得到第 4 层质心的层间位移：

节点编号: 4000021, 3000021

工况: X地震
 Xdis = 2.306 (mm)
 Ydis = -0.000 (mm)
 Zdis = -0.000 (mm)

工况: Y地震
 Xdis = -0.000 (mm)
 Ydis = 2.306 (mm)
 Zdis = -0.000 (mm)

工况: +X风
 Xdis = 1.628 (mm)
 Ydis = 0.000 (mm)
 Zdis = -0.000 (mm)

工况: -X风
 Xdis = -1.628 (mm)
 Ydis = -0.000 (mm)
 Zdis = 0.000 (mm)

工况: +Y风
 Xdis = -0.000 (mm)
 Ydis = 1.628 (mm)
 Zdis = -0.000 (mm)

工况: -Y风
 Xdis = 0.000 (mm)
 Ydis = -1.628 (mm)
 Zdis = 0.000 (mm)

工况: 恒载
 Xdis = 0.000 (mm)
 Ydis = 0.000 (mm)
 Zdis = 0.000 (mm)

注：为了使读者看得更清楚模型采用了选择显示，只显示了中间一跨的构件。

则第 4 层的弹性等效侧向刚度：

$$D_4 = 98.97 / 2.306 \times 10^{-3} = 4.292 \times 10^4 \text{ kN/m}$$

层号	塔号	质心X (m)	质心Y (m)	质心Z (m)	恒载质量 (t)	活载质量 (t)	活载质量 (不折减) (t)	附加质量 (t)	质量比
5	1	9.096	9.037	30.000	399.9	32.4	64.8	0.0	1.00
4	1	9.096	9.037	24.000	399.9	32.4	64.8	0.0	1.00
3	1	9.096	9.037	18.000	399.9	32.4	64.8	0.0	1.00
2	1	9.096	9.037	12.000	399.9	32.4	64.8	0.0	1.00
1	1	9.096	9.037	6.000	399.9	32.4	64.8	0.0	1.00

$$G_4 + G_5 = 2(1.2 \times 3999 + 1.4 \times 648) = 11412 \text{ kN}$$

则刚重比:

$$D_4xh_4/(G_4+G_5)= 4.292 \times 10^4 \times 6 / 11412 = 22.565$$

和程序输出结果基本一致:

地震:

层号	塔号	X向刚度	Y向刚度	层高	上部重量	X刚重比	Y刚重比
1	1	7.126E+004	7.126E+004	6.000	28530	14.987	14.987
2	1	4.517E+004	4.517E+004	6.000	22824	11.874	11.874
3	1	4.297E+004	4.297E+004	6.000	17118	15.062	15.062
4	1	4.292E+004	4.292E+004	6.000	11412	22.564	22.564
5	1	4.319E+004	4.319E+004	6.000	5706	45.417	45.417

该结构刚重比 $D_i \cdot H_i / G_i$ 大于10, 能够通过《高规》5.4.4条的整体稳定验算
该结构刚重比 $D_i \cdot H_i / G_i$ 小于20, 未满足《高规》5.4.1, 需要考虑重力二阶效应

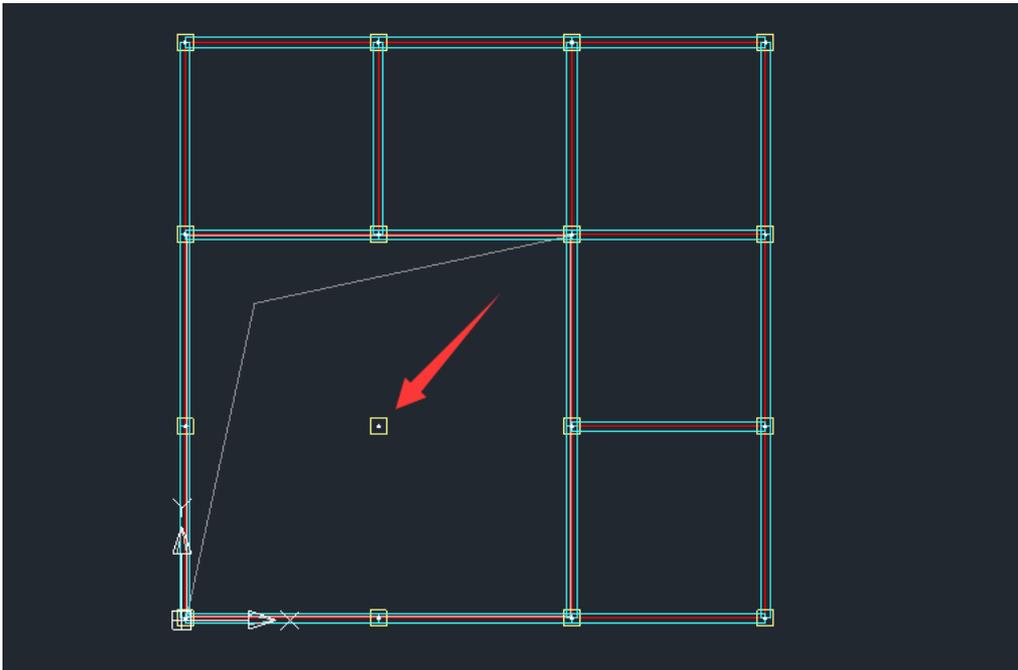
框架柱屈曲

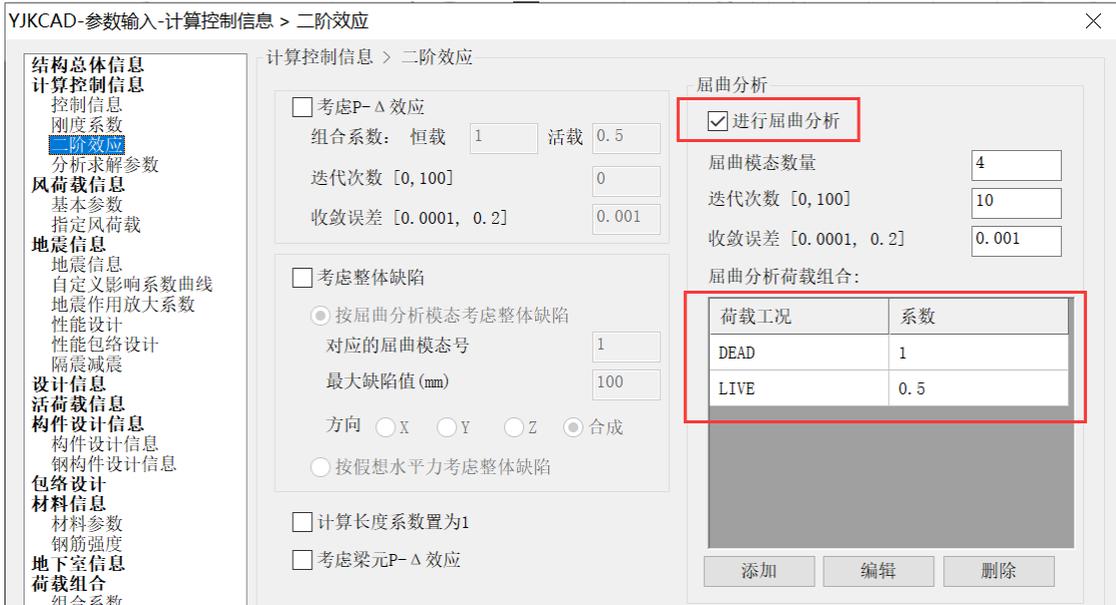
对于结构稳定性,除了保证整体稳定之外,还应关注构件级别的稳定性。对于构件的失稳问题可以分为三类:分支点失稳(又称为平衡分岔失稳)、极值点失稳、跃越失稳。

分支点失稳是理想化的情况,即达到某种荷载时,除结构原来的平衡状态存在外,还可能出现第二个平衡状态,又称为平衡分岔失稳,在YJK软件中的屈曲分析是解决线性屈曲问题,属于分支点失稳。

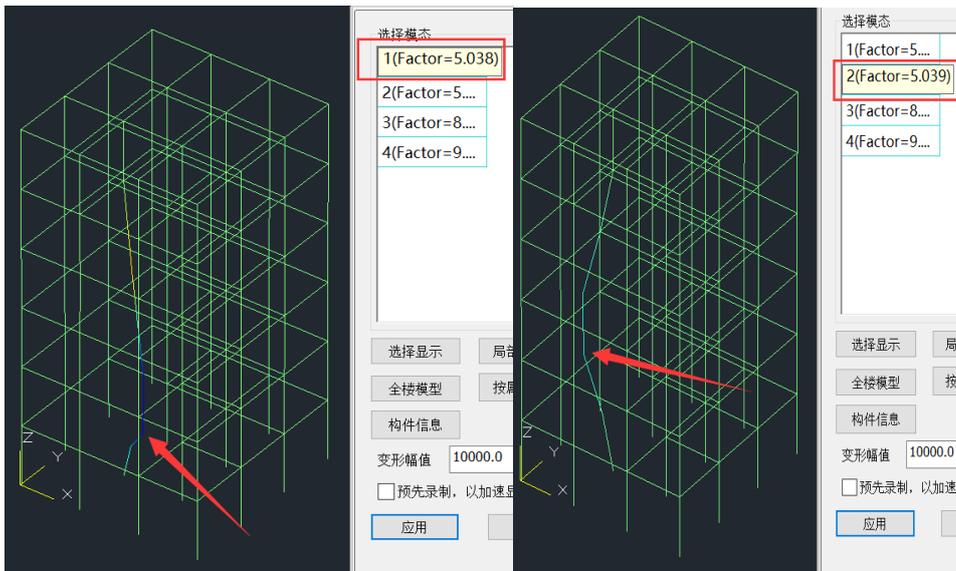
以下以一个示例模型用盈建科软件对跃层柱进行屈曲分析:

箭头处为1~4层跃层柱。





在变形图屈曲菜单下，第 1、2 阶分别为跃层柱沿 2 个方向弯曲变形占主导的模式 (wmass.out 文件也对应输出屈曲因子)。



 屈曲分析

屈曲模态号	屈曲因子
1	5.038
2	5.039
3	8.927
4	9.094

查看构件信息:

*	(DL)	-0.2	-0.2	-987.9	1.8	-1.8	0.7	-0.7
(DL)	-0.2	-0.2	-987.9	1.8	-1.8	0.7	-0.7
*	(LL)	-0.2	-0.2	-769.7	2.2	-2.2	0.9	-0.9
(LL)	-0.2	-0.2	-769.7	2.2	-2.2	0.9	-0.9

1.0 恒+0.5 活组合下跃层柱轴力为 $987.9+0.5*769.7=1372.75$

则跃层柱的临界力:

$$P_{cr}=1372.75 \times 5.038=6915.9\text{kN}$$

注：对于某些较刚的跃层柱，前几阶屈曲无法激发跃层柱的变形。则需要人为在分析柱上施加自定义荷载，然后进行自定义荷载下的屈曲分析。

自定义工况(前面打勾的是当前工况)

工况名	工...	质...	活荷...	活荷...
<input checked="" type="checkbox"/> 屈曲荷载	恒载	1.00	否	否

添加(A) 修改(M) 删除 清理

按屈曲分析模式考虑整体缺陷

屈曲分析荷载组合设置

荷载工况: 屈曲荷载

荷载组合系数: 1

考虑梁元P-Δ效应

荷载工况	系数
屈曲荷载	1

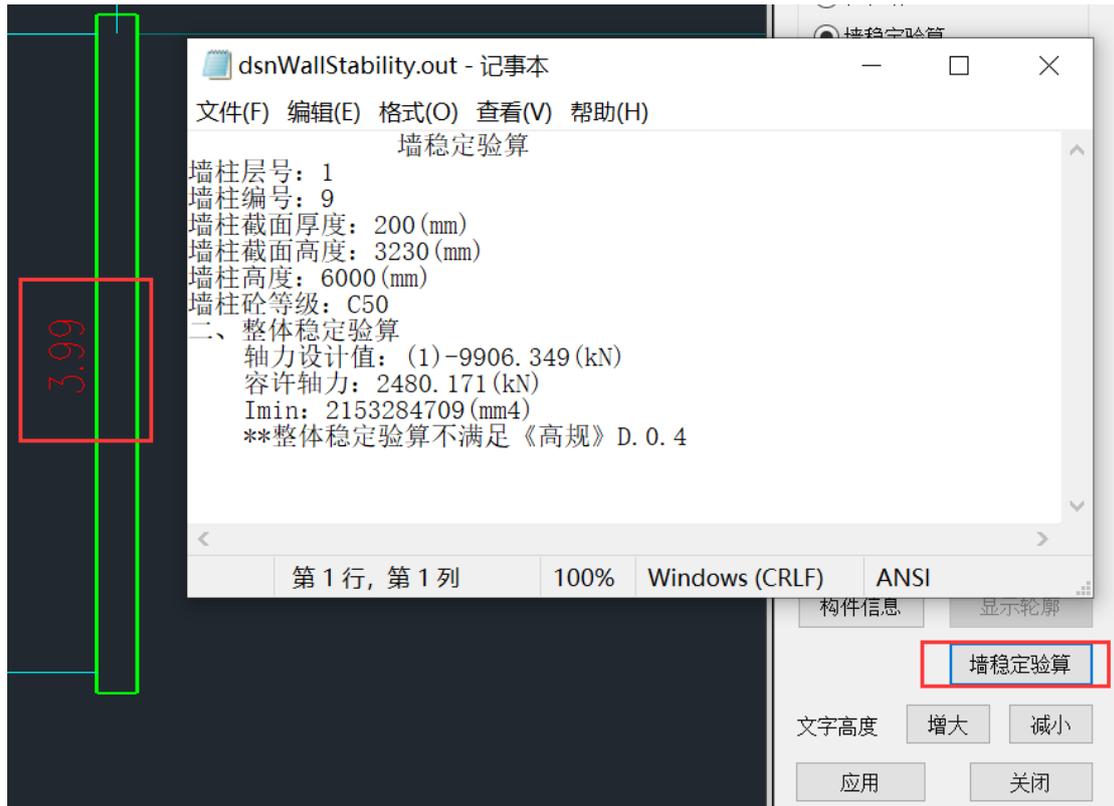
添加 编辑 删除

计算跃层柱的临界力和 1.0 恒+0.5 活类似。

剪力墙稳定

当剪力墙截面较小或楼层层高较大时，剪力墙可能发生失稳破坏，《高规》附录 D 对剪力墙的稳定做了相关要求。

在实际工程中，T 型、L 型、槽型由于墙肢计算长度系数较小，基本不会出现稳定不满足的情况，较多情况是一字墙的稳定不够。以某工程中的一字墙为例，进行剪力墙稳定性手核：



轴力设计值，可查看构件信息：

(iCase)	Shear-X	Shear-Y	Axial	Mx-Btm	My-Btm	Mx-Top	My-Top
*(DL)	0.8	-48.3	-6808.9	134.9	1.6	-155.0	-3.1
(DL)	0.8	-48.3	-6808.9	134.9	1.6	-155.0	-3.1
*(LL)	-0.0	-5.4	-1278.6	12.9	-0.1	-19.5	0.1
(LL)	-0.0	-3.0	-703.2	7.1	-0.0	-10.7	0.1

$$\text{轴力设计值} = 1.3 \times (-6808.9) + 1.5 \times (-703.2) = -9906.37 \text{ kN}$$

根据《高规》D.0.4

$$N \leq \frac{1.2E_c I}{h^2} \quad (\text{D.0.4})$$

$$\text{容许轴力} = 1.2 \times 3.45 \times 10^4 \times 2153284709 / 6000^2 = 2476277 \text{ N} = 2476.28 \text{ kN}$$

$$\text{稳定系数} = 9906.37 / 2476.28 = 4.0$$

手核结果和程序输出结果基本一致。